

Mathematik ma301: Analysis II

Übung zur Produkt- und Kettenregel

Datum

19.11.2015

Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion $f(x) = 6x \cdot (2x + 1)^2$.

Das Malzeichen legt die Verwendung der Produktregel nahe. Bei so kleinen Exponenten (2) wäre aber auch das Ausmultiplizieren (ggf. unter Verwendung der 1. Binomischen Formel) anzuraten: $f(x) = 6x \cdot (2x+1)^2 = 6x \cdot (4x^2+4x+1) = 24 \cdot x^3 + 24 \cdot x^2 + 6 \cdot x$, so dass sich ohne Verwendung von Produkt- oder Kettenregel schnell ergibt: $f'(x) = 72 \cdot x^2 + 48 \cdot x + 6$, $f''(x) = 144 \cdot x + 48$ und $f'''(x) = 144$.

Mit Produktregel wählen wir $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, abgekürzt $f = uv$, und benutzen $f' = u'v + uv'$, mit $u = 6x$, $u' = 6$ und $v = (2x+1)^2$. Die Ableitung von v erschließt sich uns nicht ohne weiteres. Q2-SuS kennen die Kettenregel und wählen $v = \square^2$ mit $\square = (2x+1)$. Mit der Kettenregel („Kästchenregel“) gilt $v'(x) = v'(\square) \cdot \square'(x)$, also $v' = 2\square \cdot 2$ („äußere Ableitung mal innere Ableitung“). Somit ergibt sich $f'(x) = 6 \cdot (2 \cdot x + 1)^2 + 24 \cdot x \cdot (2 \cdot x + 1)$. Anders als bei den Aufgaben mit Exponentialfunktion lässt sich hier nicht wirklich ein Faktor geschickt ausklammern, so dass man mit der Produktregel weiter machen möchte. Man könnte den ersten Summanden mit Kettenregel ableiten und den 2. Summanden ausmultiplizieren und dann ableiten (oder hierbei nochmals Produktregel verwenden): $f''(x) = 48 \cdot (2 \cdot x + 1) + 48 \cdot x$ Dies lässt sich schnell summandenweise ableiten $f'''(x) = 96 + 48 = 144$, fertig.

Dieses Beispiel zeigt wieder, dass „mehrere Wege nach Rom führen“, d.h. dass man die Ableitungen auf verschiedenen Wegen erhalten kann. Die Verwendung von ausgezeichneten Regeln führt aber nicht immer automatisch zu eleganten Darstellungen. In diesem Beispiel ist die Verwendung von Produkt- und Kettenregel dem stumpfen Ausmultiplizieren (evtl. unter Verwendung von „Binomi“) jedenfalls nicht offensichtlich überlegen.