1 Wendepunkt und GRF3

In der Schule werden meist nur ganzrationale Funktionen dritten Grades (GRF3) analytisch untersucht, die das Spektrum von Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkt, Wendepunkt (W) und Wendetangente liefert. Bemerkenswert sind zwei mathematische Sätze, die das Zusammenspiel GRF3 und W widerspiegeln.

1.1 Jede GRF3 hat genau einen W

Dieser Satz ist besonders einfach zu zeigen, denn notwendig und hinreichend für W sind:

1. Ist x_w Wendestelle, so gilt dort $f''(x_w) = 0$ (NBfW).
2. hinreichend für W: Ist $f''(x_w) = 0$ und gilt außerdem $f'''(x_w) \neq 0$, so ist $W\big(x_w \big| f(x_w)\big)$ ein Wendepunkt der Funktion f.

Beweis:
Für eine GRF3 gilt der Ansatz

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

mit den Koeffizienten $b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, d.h. a, b, c, d sind irgendwelche Zahlen, aber a darf dabei nicht null sein, weil f dann höchstens eine quadratische Funktion wäre.
Dann gilt für die Ableitungen:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f'''(x) = 6a \neq 0$$

Nach Voraussetzung ist $a \neq 0$ und aus der notwendigen Bedingung für den Wendepunkt (NBfW) folgt dann die Lösung $x_w = -\frac{b}{3a}$ für die Wendestelle. Einsetzen dieser Lösung in den Ansatz ergibt die Koordinaten des Wendepunkts $W\big(x_w \big| f(x_w)\big)$:

$$W\left(-\frac{b}{3a} \,\middle|\, \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right).$$

x_w erfüllt die notwendige (NBfW) und die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt und ist die einzige Lösung der Gleichung $f''(x) = 0$.

1.2 Jede GRF3 ist punktsymmetrisch zu W

Bekannt ist, dass eine GRF mit einer Funktionsgleichung mit nur ungeraden Exponenten selbst auch ungerade ist, d.h. dass der Graph dieser GRF punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems (0PS) ist. Viele wissen auch, dass für so eine 0PS-Funktion gilt

$$f(0 + x) + f(0 - x) = 0.$$

Wenn der Symmetriepunkt nun nicht bei $(0|0)$ wie bei 0PS, sondern am zuvor bestimmten Wendepunkt $W(x_w|y_w)$ liegt, so bedeutet Symmetrie nun:

$$\frac{1}{2}\big(f(x_w + h) + f(x_w - h)\big) = y_w$$

für alle $h \in \mathbb{R}$, d.h. geht man symmetrisch vom Wendepunkt W ein beliebiges Stück h vom Wendepunkt weg, so bleibt der Mittelwert beim Wendepunkt.

Beweis:
Nutzen wir obigen Satz so folgt die Behauptung durch stumpfes Rechnen:

$$f\left(-\frac{b}{3a}+h\right)=d+c\left(-\frac{b}{3a}+h\right)+b\left(-\frac{b}{3a}+h\right)^2+a\left(-\frac{b}{3a}+h\right)^3=\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d-\frac{b^2h}{3a}+ch+ah^3$$

und

$$f\left(-\frac{b}{3a}-h\right)=d+c\left(-\frac{b}{3a}-h\right)+b\left(-\frac{b}{3a}-h\right)^2+a\left(-\frac{b}{3a}-h\right)^3=\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d+\frac{b^2h}{3a}-ch-ah^3$$

ergibt

$$\frac{1}{2}\left(f\left(-\frac{b}{3a}+h\right)+f\left(-\frac{b}{3a}-h\right)\right)=\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d$$

kurzum

$$\frac{1}{2}\big(f(x_w+h)+f(x_w-h)\big)=y_w \qquad \forall h\in\mathbb{R}$$

Also: Jede GRF3 ist punktsymmetrisch zu W.

2 Extrempunkt und GRF2

In der Sek I werden bereits ganzrationale Funktionen zweiten Grades (GRF2, Parabeln) analytisch untersucht, die zumindest einen Hoch- oder Tiefpunkt liefern.

Analog zu 1 kann man zwei mathematische Sätze zu diesen Parabeln beweisen, was vergleichsweise einfach und anschaulich sein sollte.

2.1 Jede GRF2 hat genau einen Extrempunkt E

Dieser Extrempunkt E heißt in der Sek I einfach Scheitelpunkt (bei nach unten geöffneten Parabeln erinnert der Scheitelpunkt an den Scheitel langhaariger Menschen). Dieser Satz ist besonders einfach zu zeigen, denn notwendig und hinreichend für E sind:

1. Ist x_E Extremstelle, so gilt dort $f'(x_E)=0$ (NBfE).
2. hinreichend für E: Ist $f'(x_E)=0$ und gilt außerdem $f''(x_E)\neq 0$, so ist $E\big(x_E\big|f(x_E)\big)$ ein Extrempunkt der Funktion f.

Beweis:
Für eine GRF2 gilt der Ansatz

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

mit den Koeffizienten $b,c\in\mathbb{R}$ und $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, d.h. a,b,c sind irgendwelche Zahlen, aber a darf dabei nicht null sein, weil f dann höchstens eine lineare Funktion wäre.
Dann gilt für die Ableitungen:

$$f'(x)=2ax+b$$

$$f''(x)=2a\neq 0$$

Nach Voraussetzung ist $a\neq 0$ und aus der notwendigen Bedingung für den Extrempunkt (NBfE) folgt dann die Lösung $x_E=-\frac{b}{2a}$ (oft wird dies auch als $x_E=\frac{-p}{2}$ formuliert) für die Extremstelle. Einsetzen dieser Lösung in den Ansatz ergibt die Koordinaten des Scheitelpunkts $E\big(x_E\big|f(x_E)\big)$:

$$E\left(-\frac{b}{2a}\middle|-\frac{b^2}{4a}+c\right).$$

x_E erfüllt die notwendige (NBfE) und die hinreichende Bedingung für einen Extrempunkt und ist die einzige Lösung der Gleichung $f'(x)=0$.

2.2 Jede GRF2 ist achsensymmetrisch zu E

Bekannt ist, dass eine GRF mit einer Funktionsgleichung mit nur geraden Exponenten selbst auch gerade ist, d.h. dass der Graph dieser GRF achsensymmetrisch zur y-Achse (YAS) ist. Viele wissen auch, dass für so eine YAS-Funktion gilt

$$f(0+x) = f(0-x).$$

Wenn die Symmetrieachse nun nicht bei 0 wie bei YAS, sondern an der zur y-Achse parallelen Achse durch die Extremstelle x_E liegt, so bedeutet Achsensymmetrie nun:

$$f(x_E+h) = f(x_E-h)$$

für alle $h \in \mathbb{R}$, d.h. geht man symmetrisch vom Scheitelpunkt E ein beliebiges Stück h vom Scheitelpunkt weg, so finden wir den gleichen Wert symmetrisch zur Spiegelachse auch um h entfernt auf der anderen Seite.

Beweis:

Nutzen wir obigen Satz so folgt die Behauptung durch stumpfes Rechnen: $f(x_E+h) = c + b\left(-\frac{b}{2a}+h\right)+a\left(-\frac{b}{2a}+h\right)^2 = -\frac{b^2}{4a}+c+ah^2$ ist der Wert der quadratischen Funktion, wenn wir um h rechts von der Extremstelle auswerten. Und tatsächlich ergibt sich der gleiche Wert, wenn wir um h links von der Extremstelle auswerten: $f(x_E-h) = -\frac{b^2}{4a}+c+ah^2$. Also

$$f(x_E+h) = f(x_E-h)$$

für alle $h \in \mathbb{R}$, d.h. alle quadratischen Funktionen (GRF2) sind achsensymmetrisch zu einer Achse die durch die Extremstelle x_E geht. Anschaulich:

Als Beispiel betrachten wir die GRF2

$$f(x) = (x-3)^2-1$$

in der Scheitelpunktform, was besagt, dass eine nach oben geöffnete Normalparabel ihren Scheitelpunkt bei 3 auf der x-Achse und bei -1 auf der y-Achse hat. In der Normalform, also als gewöhnliche GRF2 aumultipliziert haben wir die Funktionsgleichung

$$f(x) = x^2-6x+8$$

wobei wir insbesondere erkennen, dass bei 8 der Graph die y-Achse schneidet.

Der Scheitelpunkt ist der Tiefpunkt bei $E(3|-1)$. Man erkennt sofort die Achsensymmetrie um die rötlich gestrichelte Achse, die durch diesen Scheitelpunkt geht. Wenn wir für $h = 2$ einsetzen haben wir zueinander die symmetrischen Spiegelpunkte A und A'. Alles klar?