

1 Quadratische Gleichungen und Euler

Die heutige Schulmathematik hat sich nur wenig von dem Standard LEONHARD EULERS (1703 – 1783) entfernt. Sein 1770 auf Deutsch erschienenenes Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra“ bietet eine auch heute noch gültige Darstellung der Grundsätze der Algebra (und Analysis) und könnte vom mathematischen Inhalt her auch heute noch als Schulbuch konkurrieren, wobei bemerkenswert ist, dass die bei *Reclam* erschienene Fassung in jede Hosentasche passen würde. EULERS „Vollständige Anleitung zur Algebra“ ist ein wichtiger Prototyp eines Mathe-Lehrbuchs (*Mathematiktextbooks*). Es ist zuerst im Jahre 1767/1768 in Russisch erschienen, 1770 — wie gesagt in deutscher Sprache. Eine französische Übersetzung mit Anfügungen von LAGRANGE kam 1794 heraus. Es beginnt mit den Grundrechnungsarten, erörtert schließlich Lineare Gleichungssysteme und die Lösung der *Diophantischen Gleichung* nach JOHN PELL und endet mit einem Beweis der FERMATSchen Vermutung im Falle $n = 3$. Sehr kleinschrittig wird auch die Polynomdivision erläutert. Die Legende sagt, dass EULER das Buch blind geschrieben und einem unbedarften Schneidergesellen diktiert habe, der mithilfe dieses Buches Algebra erlernte. EULER war bereits 1735 auf dem rechten Auge und im Jahre 1771 vollständig erblindet. Das Buch hatte eine Auflage von rund 100000 Exemplaren. Es ist eines der erfolgreichsten Mathematiklehrbüchern aller Zeiten.

2 Aufgaben

Auf E u l e r s „Vollständige Anleitung zur Algebra, Des Zwayten Theils Erster Abschnitt“:

2.1 Gesellschafter

§. 253 (Nr. 75):

Etliche Kaufleute bestellen einen Factor und schicken ihn nach Archangelsk, um daselbst einen Handel zu halten. Jeder von ihnen hat zehnmal soviel Reichsthaler eingelegt als Personen sind. Nun gewinnt der Factor an 100 Reichsthaler je Reichsthaler zweymal so viel als der Personen sind. Wenn man dann den 100. Theil des ganzen Gewinns mit $2\frac{2}{9}$ multiplicirt, so kommt die Zahl der Gefellen heraus. Wie viele sind ihrer gewesen?

2.2 Pferd

§. 259 (Nr. 88):

Einer kauft ein Pferd für etliche Reichsthaler, verkauft es wieder für 119 Reichsthaler und gewinnt darauf so viele Prozente als das Pferd gekostet; nun ist die Frage, wie theuer ist dasselbe eingekauft worden?

2.3 Zahlensuche

§. 275 (Nr. 122):

Man suche zwei Zahlen, deren Product = 35 und die Differenz ihrer Quadraten = 24?

2.4 Polynomdivision

§. 296 (Nr. 166):

Suche ... so kommt $x^3 + 27x^2 + 270x = 1576$

Die Theiler der Zahl 1576 sind 1,2,4,8 etc., von denen 1 und 2 zu klein, 4 aber für x gesetzt dieser Gleichung ein Genüge leistet; wollte man die beiden übrigen Wurzeln finden, so müßte man die Gleichung durch x^4 (...) dividieren ...

3 Übersetzung

Aus Eulers „Vollständige Anleitung zur Algebra, Des Zweyten Theils Erster Abschnitt“:

3.1 Gesellschafter

Einige Gesellschafter bestellen einen Faktor (Leiter einer Faktorei = Handelsniederlassung) und schicken ihn nach Archangelsk (Hafen am Weißen Meer, worüber seinerzeit der westeuropäische Handel mit dem russischen Reich erfolgte), um dort einen Handel abzuschließen. Jeder von ihnen hat zehnmal soviel Reichstaler eingelegt, wie die Anzahl der Gesellschafter ist. Nun gewinnt der Faktor pro 100 Reichstaler zweimal so viel wie die Anzahl der Gesellschafter ist. Wenn man dann den 100. Teil des ganzen Gewinns mit $2\frac{2}{9}$ multipliziert, so kommt die Zahl der Gesellschafter heraus. Wie viele Gesellschafter hat dieser GmbH-Vorläufer? Antwort: Euler errechnet in seinem Buch selbst 15 Gesellschafter, die jeweils 150 Reichstaler eingelegt haben.



3.2 Pferd

Jemand kauft ein Pferd für einige Reichstaler, verkauft es wieder für 119 Reichstaler und gewinnt daraus so viele Prozente wie das Pferd gekostet hat; nun ist die Frage, wie teuer ist das Pferd eingekauft worden? Also was war der Einkaufspreis x des Pferdes? Der Verkaufspreis sorgt für einen Gewinn von $x\%$ bezogen auf den Einkaufspreis x Reichstaler. Antwort: Euler errechnet in seinem Buch selbst einen Einkaufspreis von 70 Talern. Beim Verkaufspreis von 119 Talern ist der Gewinn 49 Taler (= 70% des Einkaufspreises).



3.3 Zahlensuche

Man bestimme zwei Zahlen $x > y$, wobei deren Produkt $x \cdot y = 35$ und die Differenz ihrer Quadrate $x^2 - y^2 = 24$ ist! Antwort: Euler errechnet in seinem Buch selbst $x = 7$ und $y = 5$, was durch Raten schnell ermittelt wird. Darüber hinaus gibt Euler auch die imaginären Lösungen $x = \sqrt{-25}$ und $y = \sqrt{-49}$ an.



3.4 Polynomdivision

Suche ... so ergibt sich die kubische Gleichung: $x^3 + 27x^2 + 270x = 1576$, für die wir die Nullstellen ermitteln wollen.

Die Teiler der Zahl 1576 sind 1,2,4,8 etc., von denen 1 und 2 zu klein, 4 aber für x gesetzt eine Nullstelle liefert („geraten“: $x_1 = 4$); wollte man die beiden übrigen Nullstellen finden, so müsste man die kubische Gleichung durch $(x - 4)$ wie folgt dividieren:



$$\begin{array}{r} (x^3 + 27x^2 + 270x - 1576) : (x - 4) = x^2 + 31x + 394 \\ \underline{-x^3 + 4x^2} \\ 31x^2 + 270x \\ \underline{-31x^2 + 124x} \\ 394x - 1576 \\ \underline{-394x + 1576} \\ 0 \end{array}$$

EULER erläutert weiter: Auf dem Quotienten erhält man daher $x^2 = -31x - 394$ und darauf wird $x = -\frac{31}{2} \pm \sqrt{\frac{961}{4} - \frac{1576}{4}}$, welche beide Wurzeln imaginär oder unmöglich sind. Im heutigen Deutsch würde man sagen, dass das Restpolynom $x^2 + 31x + 394 = 0$ mit der pq-Formel auf die weiteren Nullstellen $x_{2,3} = -\frac{31}{2} \pm \sqrt{\frac{961}{4} - 394}$ führt, die jedoch nicht reell sind, d.h. es gibt nur die geratene Lösung $x_1 = 4$.