

1 Kraterproblem - Gefangen im Krater?



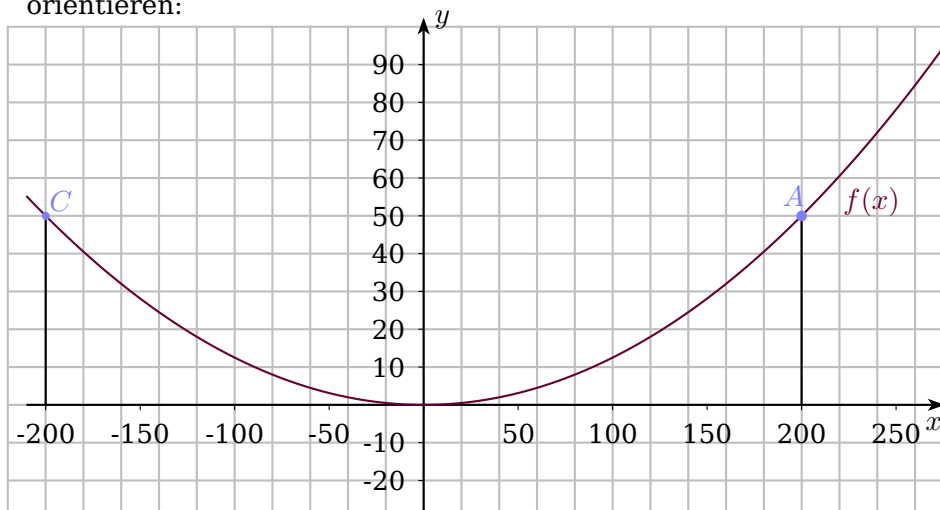
Lagerfeueratmosphäre

„... Damals in der Pampa sind wir auch in der Nacht gefahren, mein Freund Pablo und ich. Tja, und dann einmal nicht aufgepasst und schon ging es holter-diepolter einen Krater hinunter. Zum Glück haben wir uns nicht überschlagen, aber wir waren erstmal ganz schön verdatert, ob wir denn aus diesem Schlamassel wieder heraus kämen. Laut Betriebsanleitung sollte unser Wagen eine Steigung bis 65% schaffen, naja aber bei den Zylinderkopfdichtungen sollten wir froh sein, wenn die Steigung unter 60% bleiben würde. Wir waren nun am Tiefpunkt (in mehrfacher Hinsicht) eines parabelförmigen Kraters (Paraboloiden), der in einer Entfernung von 200 Metern einen Kraterrand von 50 Metern auftürmte. Sollte der Wagen das schaffen können? Wir stellten unsere Berechnungen an ...“

2 Aufgaben

2.1 Erstelle eine Skizze des Problems

Okay, Du darfst Dich bei Deiner Skizze an der folgenden Abbildung des Kraterquerschnitts orientieren:



2.2 Bestimme die Funktionsgleichung $f(x)$, die den Kraterquerschnitt beschreibt

Wähle hierzu als Variablen x für die Entfernung vom Tiefpunkt, und $y = f(x)$ für die Höhe, die maximal 50 Meter werden kann (Kraterrand).



2.3 Bestimme zumindest näherungsweise mehrere Steigungen dieser Funktion $f(x)$

Bediene Dich hierzu z.B. folgender Tabelle (einige Werte sind bereits eingetragen), mit denen Du Funktionswerte¹ und Sekantensteigungen² berechnest und nacheinander einträgst und folgendem Applet als Hilfsmittel:

<http://www.warncke-family.de/fos/pampa.html>

| Kraterrand | 2. Punkt | Kraterrandhöhe | Höhe des 2. Punktes | Sekantensteigung |
|------------|----------|----------------|---------------------|---------------------------------|
| x_A | x_B | $f(x_A)$ | $f(x_B)$ | $\frac{f(x_A)-f(x_B)}{x_A-x_B}$ |
| 200 | 0 | 50 | 0 | 0.25 = 25% |
| 200 | 20 | 50 | ... | 0.275 = 27.5% |
| ... | | | | |
| 200 | 180 | 50 | ... | 0.475 = 47.5% |
| 200 | 190 | 50 | ... | 0.4875 = 48.75% |
| 200 | 195 | 50 | ... | rd. 49.38% |
| 200 | 199 | 50 | ... | rd. 49.88% |
| 200 | 199.9 | 50 | ... | ... |



2.4 Bestimme die maximale Steigung dieser Funktion $f(x)$

Zumindesten anschaulich ist klar, wie groß die maximale Steigung des Kraters werden kann. Kannst Du aber auch mathematisch über einen Grenzwertprozess beweisen, dass die maximale Steigung genau 50% beträgt? Benutze das Merkblatt:

http://www.warncke-family.de/fos/mat_begriffe.pdf

und Dein Wissen über das Rechnen, insbesondere Kürzen, mit dem Limes. Vielleicht hilft es Dir hierbei auch, das Buch „Schilling: Analysis“, S. 133ff. durchzuarbeiten.



¹Du hast sicher inzwischen heraus gekriegt, dass es sich bei der Funktion um $f(x) = \frac{5}{4000} \cdot x^2$ handelt, mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \{x \mid -200 \leq x \leq 200\}_{\mathbb{R}}$.

²Falls Du mit Geraden und deren 2-Punkte-Form (Sekantensteigung) noch unsicher bist, arbeite bitte schnell die Grundlagen zu Geraden durch, indem Du z.B. <http://www.warncke-family.de/Geraden/> abschließt.