

AB: Steigung, Berg- und Talfahrt

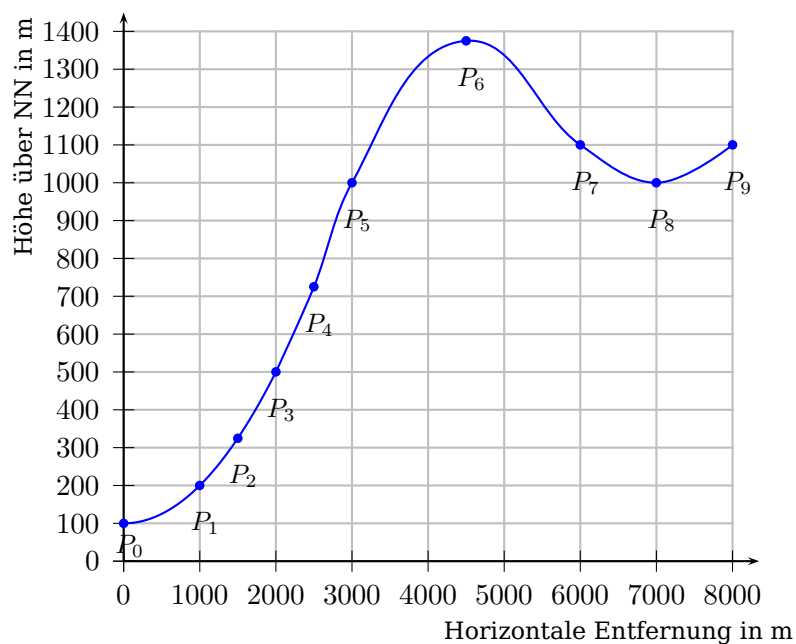
1 Begriffe

Versuch anhand der folgenden Grafik (Dolomiten) die Begriffe: Randminimum, Randmaximum, relatives Minimum, relatives Maximum, absolutes Minimum, absolutes Maximum und Steigung zu erläutern.



2 Steigungsverlauf

Während einer Bergwanderung werden Aufzeichnungen über die horizontal zurückgelegte Strecke und die jeweils erreichte Höhe über Normalnull (NN) gemacht. Aufgrund dieser Messungen kann der Graph einer Funktion (sog. Höhenprofil s.u.) gezeichnet werden, die jeder horizontalen Entfernung zum Ausgangspunkt eine bestimmte Höhe zuordnet. Beschreibe die Steigung entlang der Wanderstrecke insbesondere an den zehn eingezeichneten Punkten P_0, P_1, \dots, P_9 . Wann ist es wie steil oder flach ... ?



3 Lösungshinweise

Zur 1. Aufgabe: Randextrema sind ganz links bzw rechts, relative Extrema sind bzgl. ihrer näheren Umgebung, absolute Extrema sind die absolut kleinsten bzw. größten Höhenwerte. Etwas genauer: Der Punkt H (bzw. T) des Funktionsgraphen ist in seiner näheren Umgebung der höchstgelegene (bzw. tiefstgelegene) und wird deshalb lokaler oder relativer Hochpunkt (bzw. Tiefpunkt) genannt. Sein x -Wert heißt Maximalstelle x_H (bzw. Minimalstelle x_T), sein Funktionswert heißt Maximum (bzw. Minimum). Ist ein Punkt der höchste bzw. tiefste überhaupt, also absolut gesehen, so spricht man vom absoluten Hochpunkt bzw. absoluten Tiefpunkt. Der Oberbegriff für Hoch-/Tiefpunkt ist Extrempunkt. Der x -Wert des Extrempunktes heißt Extremstelle, der Funktionswert heißt Extremum (oder Extremwert). Punkte haben immer zwei Koordinaten, es reicht nicht aus, nur den x -Wert anzugeben, wenn nach den Punkten gefragt ist. Dann muss zusätzlich zu der Stelle auch immer der zugehörige Funktionswert bestimmt werden! Ist der Wert der Funktion am Rand verschieden zu dem am nächstgelegenen Punkt (also nach innen gesehen), so ist dieser Wert automatisch auch ein Randextremum. Im Bild ist der genannte Punkt H der zu dem entsprechenden Gipfel aus den Dolomiten zugehörige Hochpunkt, der nicht nur ein relatives Maximum zu seiner näheren Umgebung darstellt, sondern für das Bild auch ein absolutes Maximum darstellt.

Zur 2. Aufgabe: Im Startpunkt scheint der Graph (und damit der Wanderweg) die Steigung Null aufzuweisen. Die ersten 4500 Meter geht die Wanderung bergauf, d.h. die Steigung des Funktionsgraphen ist positiv. Dabei ist die Steigung zunächst gering, wird dann immer größer und nimmt schließlich wieder ab. Bei 4500 Meter, der absolut höchsten Stelle des Wanderweges, ist die Steigung wie bei jedem relativen Extremum Null. Dann ist die Steigung negativ, der Weg geht bergab. Bei 7000 Meter zurückgelegtem Weg ist die Steigung wieder Null, die restlichen 1000 Meter (von Meter 7000 bis Meter 8000) ist die Steigung wieder positiv. Gib hierbei genauer an wie steil der jeweilige Wanderweg ist. Bediene Dich der Steigungsdreiecke, die Du in die Funktionsskizze mit hinein zeichnest. Die Steigung einer Sekante durch zwei Punkte $P_1(x_1|y_1), P_2(x_2|y_2)$ ist gegeben als $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Die ersten 3000 horizontalen Meter können durch die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{10000} \cdot x^2 + 100$ modelliert werden. Dies erlaubt eine quantitative Beschreibung der zugehörigen Sekanten und Tangenten.

Und mit den bekannten Ableitungsregeln, Potenz-, Summen- und Faktorregel, kann die Steigung auch exakt mit der ersten Ableitung $f'(x) = \frac{x}{5000}$ („Steigungsfunktion“) für $0 \leq x \leq 3000$ beschrieben werden.